高３理系 数ⅡＢ選択者の課題　第６回

例年だと夏日の続く頃なのに、先週は真冬の再来かのような寒さに見舞われて、そもそもコロナ自粛生活で体力も気力も萎んできているところにこの仕打ち・・・。皆さん風邪などひいてませんか？　緊急事態宣言は８都道府県以外が解除され、いよいよ 21 日には残りも全解除か?! と期待するも、東京近郊１都３県は継続・・・。(25 日からはうちは特殊オープンだけどね…）そんじゃ勉強で憂さ晴らししよー　(^_-)-☆

ではでは「頭を鍛える」お手伝い　第５弾 のお知らせです。(^^♪

↑

＜気にしてないとは思いますが、前回から課題告知回数とお知らせ第ｎ弾の自然数ｎはずれてますんでアシカラズ…＞

テキスト：「 改訂版 チャート式 解放と演習シリーズ対応　Set Up 数学演習ⅠⅡAB 基本編[受験編] 」

やる箇所：P36・38・40（数Ａ)，P52・54・56・58・60（数Ⅱ）

やり方：指定されたページの問題を記述式に解く。(教科書・参考書などを参考にして解いても良い)

【注意】Check ページ(見開き左側のページ)は、指定外のところも解いてかまいませんが、

その他のページ《Set Up 頁(見開き右側の頁)・追加問題(巻末)》は、手を付けないこと

(授業では、これまでの分も含めて課題の質問対応+追加問題演習をしています。

不明な点の問い合わせは、9 時～11 時半までの間に学校(佐野)に連絡をくれるか、登録したクラスのグループメールを通じて聞いてください。メールの場合は佐野への質問であることを明記してください。)

提出予定日：次に登校する日

健闘を祈る♪　by Sano

プリントアウトして書きこむことをお勧めする。☆頑張って____に適するものを入れたり問題を解きなさい。

無限数列　a_1，a_2，a_3，…，a_n，….　の各項を順に＋（足す）の記号で結んだ「式」

つまり，「$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$」←①　を無限級数という。

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$ と表すこともある

無限級数①においても，数列同様に a_1 を初項，a_n を第 n 項という。

また，無限数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n で表す。

これは無限級数①の第 n 項までの部分和という。

この部分和から新たに，無限数列 $\{S_n\}$ をつくる。　S_1，S_2，S_3，…，S_n，….

「$\{S_n\}$ が収束して，その極限値が S となる」とき，つまり「$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_k=S$」

このとき，「無限級数①は S に収束する」または「無限級数①の和は S である」という

注）「　」でかかれたことは全部同値となる

したがって　$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ と表すこともある。

無限級数の和

無限級数　$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$　の部分和 S_n から作られる無限数列 $\{S_n\}$ が S に収束するとき，この無限級数の和は S である。

※　無限数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$　は発散する

P105　例題3　　次の無限級数は収束することを示し，その和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\cdots$$

解）第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$　※ $\displaystyle\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$　　※ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

したがって，この無限級数は収束して，その和は1である。

※ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$ となる

P105　例題4　　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ の収束，発散を調べよ。

解）分母の有利化の利用

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$

$$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=\sqrt{n+1}-1$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

したがって，この無限級数は発散する。

P105　練習12　次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

解)

(1) $$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

したがって，この無限級数は収束して，その和は $\dfrac{3}{4}$ である。

(2) $$\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)=\infty$

したがって，この無限級数は発散する。

初項 a，公比 r の無限等比数列から作られる無限級数

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$　を初項 a，公比 r の無限等比級数という。

無限等比級数の収束･発散

［１］ $a \neq 0$　のとき

（ｉ） $|r|<1$ ならば収束し，その和は $\dfrac{a}{1-r}$

（ⅱ） $|r| \geqq 1$ ならば発散する

［２］ $a=0$　のとき　S 収束し，その和は 0 である。

※　無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ が収束する $\Leftrightarrow a=0$　または，$|r|<1$

証明)

［１］ $a \neq 0$　なので，$r \neq 1$のとき，部分和$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

（ｉ）のとき $|r|<1$　なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$

（ⅱ）のとき $|r| \geqq 1$　なので，$r \leqq -1$，かつ $r>1$ のとき，無限等比数列は発散するので，無限数列 $\{S_n\}$ も発散する。

$r=1$　のとき，無限等比数列は　a，a，$\cdots$，a，$\cdots$と a が無限に並ぶ数列なので，その部分和 $S_n = a + a + \cdots + a = na$　なので，て $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ よって発散する

［２］ $a=0$なので，無限級数は$0+0+0+\cdots\cdots$　なので，収束し，その和は0　となる。

P107　例題5

次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1)　初項 2，公比 $\dfrac{1}{3}$　　(2)　初項 1，公比 $-\sqrt{3}$

解）(1)　初項が 2，公比について $\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから収束して，その和は

$$\frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3$$

(2)　初項が 1，公比について $|-\sqrt{3}|>1$ であるから，発散する。

P107　練習13

次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1)　初項 1，公比 $\frac{1}{2}$

(2)　初項 $\sqrt{2}$，公比 $-\sqrt{2}$

(3)　$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\cdots\cdots$

(4)　$(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\cdots\cdots$

解）

1)　初項が 1，公比について $\left|\frac{1}{2}\right|<1$ であるから収束して，その和は

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

(2)　初項が $\sqrt{2}$，公比について $|-\sqrt{2}|>1$ であるから，発散する。

(3)　公比 $r=-\frac{1}{3}$

初項が 1，公比について $\left|-\frac{1}{3}\right|<1$ であるから収束して，その和は

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

(4)　公比 $r=\sqrt{2}-1$

初項が $\sqrt{2}+1$，公比について $|\sqrt{2}-1|<1$ であるから収束して，その和は

$$\frac{\sqrt{2}+1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{4+3\sqrt{2}}{2}$$

P107　例題6　次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \cdots\cdots$$

解）

初項が x，公比が $1-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$x=0$ または $|1-x|<1$ なので，

（ｉ）$x=0$

（ⅱ）$|1-x|<1$ のとき　$-1<1-x<1$　すなわち　$0<x<2$

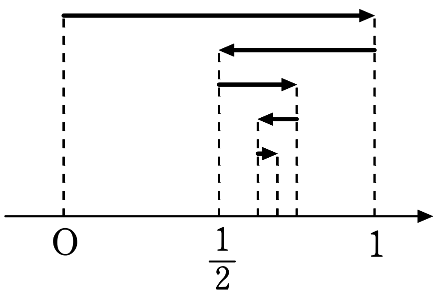
（ｉ）（ⅱ）より，求める x の値の範囲は　$0 \leqq x < 2$

P108　応用例題4

数直線上で，点 P が原点 O から正の向きに 1 だけ進み，そこから負の向きに $\frac{1}{2}$，そこから正の向きに $\frac{1}{2^2}$，そこから負の向きに $\frac{1}{2^3}$ と進む。以下，このような運動を限りなく続けるとき，点 P の極限の位置の座標を求めよ。

解）点 P の座標は，順に次のようになる。

$$1,\ 1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3},\ \cdots\cdots$$



よって，点 P の極限の位置の座標は，初項 1，公比 $-\frac{1}{2}$ の無限等比級数で表される。

公比について $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して，その和は

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

したがって，点 P の極限の位置の座標は　$\frac{2}{3}$

P107　練習14　次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

(1)　$1+(2-x)+(2-x)^2+\cdots\cdots$　　　(2)　$x+x(2-x)+x(2-x)^2+\cdots\cdots$

解）

）　初項が 1（$\neq 0$），公比が $2-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は $|2-x|<1$ より

$-1<2-x<1$

よって　$1<x<3$

(2)　初項が x，公比が $2-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は　$x=0$ または $|2-x|<1$

（ｉ）$x=0$

（ii）$|2-x|<1$ より

$1<x<3$

（ｉ）（ii）より，求める x の値の範囲は　$x=0$，$1<x<3$

P108　練習15

数直線上で，点 P が原点 O から正の向きに 1 だけ進み，そこから負の向きに $\frac{1}{2^2}$，そこから正の向きに $\frac{1}{2^4}$，そこから負の向きに $\frac{1}{2^6}$ と進む。以下，このような運動を限りなく続けるとき，点 P の極限の位置の座標を求めよ。

解）

点 P の座標は，順に次のようになる。

$$1,\ 1-\frac{1}{2^2},\ 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4},\ 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6},\ \cdots\cdots$$

よって，点 P の極限の位置の座標は，初項 1，公比 $-\frac{1}{2^2}$ の無限等比級数で表される。

公比について $\left|-\frac{1}{2^2}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して，その和は

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2^2}\right)}=\frac{4}{5}$$

したがって，点 P の極限の位置の座標は　$\frac{4}{5}$

今回のプリントは以上，あとはクリアーをやることお勧めする。

今週はここからだよ～。質問があればメールしましょう。

____に適するものを頑張って入れましょう。問題も解きましょう。

循環小数と無限等比級数

P109　例6　循環小数 $0.3\dot{1}\dot{8}$ を分数で表す。

$$0.3\dot{1}\dot{8}=0.3+0.018+0.00018+0.0000018+\cdots\cdots$$ であり，

右辺の第 2 項以下は，初項____，公比____の無限等比級数となる。

公比について，________であるから，この無限等比級数は収束して

$$0.3\dot{1}\dot{8}=0.3+\frac{0.018}{1-0.01}=\frac{3}{10}+\frac{18}{990}=\frac{315}{990}=\frac{7}{22}$$

無限級数の性質

収束する無限級数において

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$，　$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=T$　のとき，

1　$\sum_{n=1}^{\infty}ka_n=kS$　ただし，k は定数

2　$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=S+T$　，　$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=S-T$

P110　例題7　　無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$ の和を求めよ。

解）

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ は，初項__，公比__の無限等比級数であり，公比について，________

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ は，初項__，公比__の無限等比級数であり，公比について，________

であるから，これらの無限等比級数はともに収束して，それぞれの和は

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=$ ______ $=$ _

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=$ ______ $=$ __

よって　$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=$ _____ $=$ __

P109　練習16　　次の循環小数を分数で表せ。

(1)　$0.\dot{6}$　　(2)　$0.2\dot{3}\dot{4}$　　(3)　$0.4\dot{7}0\dot{2}$

解）

P110　練習17　　次の無限級数の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{2}{3^n}\right)$　　　(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n}$

解)

無限級数において，収束•発散でいえること

1　　無限級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$が収束する　$\Longrightarrow$　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Updownarrow$ 対偶

２　数列$\{a_n\}$が0に収束しない　$\Longrightarrow$　無限級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

（注意：十分条件であり，逆は成り立つとは限らない）

◇無限級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$の収束•発散を考える

① 数列$\{a_n\}$の極限を調べる

② 数列$\{a_n\}$が0に収束しなければ,無限級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$は発散する

③数列$\{a_n\}$が0に収束した場合は，部分和$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$を求め，$\lim_{n\to\infty} S_n$を考える

P111　例7

無限級数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$の収束，発散を調べる。

第n項をa_nとすると

「考え方① 数列$\{a_n\}$の極限を調べる」

$\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\qquad}{\qquad}$

$= \dfrac{\qquad}{\qquad}$

$=$＿＿＿（②の条件をみたした）

$\lim_{n\to\infty} a_n \fallingdotseq 0$ であるから，この無限級数は発散する。

P111　練習18

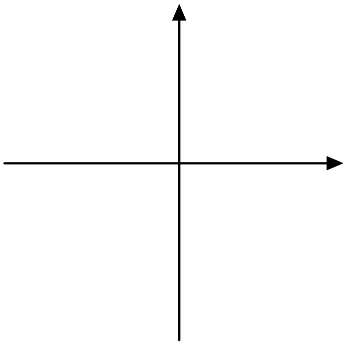
無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)$ は発散することを示せ。

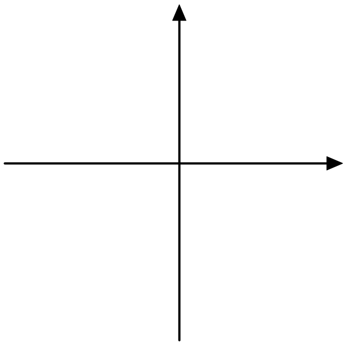
解）

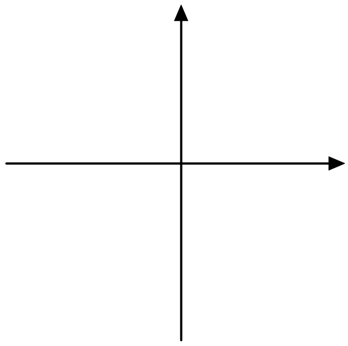
数学Ⅲ　関数教科書P78～P82までをよく読み，頑張って解答しなさい。

$\boxed{1}$ 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=\dfrac{3}{x}$　　(2) $y=-\dfrac{2}{x}$　　(3) $y=\dfrac{1}{3x}$







$\boxed{2}$ 次の関数のグラフは $y=\dfrac{2}{x}$ のグラフをどのように平行移動したものか。

(1) $y=\dfrac{2}{x}+4$　　(2) $y=\dfrac{2}{x+1}$　　(3) $y=\dfrac{2}{x-2}-3$

$\boxed{3}$ 次の関数のグラフを軸も含めてかけ。また，その定義域，値域，漸近線を求めよ。

(1) $y=\dfrac{3}{x}-2$　　(2) $y=-\dfrac{1}{x+2}+3$　　(3) $y=\dfrac{x-2}{x-3}$

(4) $y=\dfrac{-3x+6}{x-1}$　　(5) $y=\dfrac{2x+4}{x+3}$

$\boxed{4}$ 次の関数のグラフを軸も含めてかけ。また，その値域を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{-2x+1}{2x-3}$ $(2\leqq x\leqq 4)$

(2)　$y=\dfrac{x-2}{2x+1}$ $(-1\leqq x\leqq 0)$

$\boxed{5}$　2 つの関数 $y=\dfrac{-2x-1}{x+3}$ ……① と $y=\dfrac{3x+2}{x-1}$ ……② について

(1)　①，② をそれぞれ $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形せよ。

(2)　② のグラフは，① のグラフをどのように平行移動したものか。

$\boxed{6}$ 関数 $y=\dfrac{3x+a}{x+b}$ のグラフが次の条件を満たすとき，定数 a，b の値をそれぞれ求めよ。

(1)　点 $(1,\ 2)$ を通り，漸近線の 1 つが直線 $x=-3$ である。

(2)　x 軸，y 軸とそれぞれ点 $(2,\ 0)$，$(0,\ -3)$ で交わる。

$\boxed{7}$　次のような双曲線をグラフとする関数を $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ の形で表せ。

(1)　x 軸，y 軸を漸近線として，点 $(1,\ 2)$ を通る。

(2)　2 直線 $x=2$，$y=-1$ を漸近線として，点 $(3,\ 2)$ を通る。

$\boxed{8}$　次の 2 つの関数について、グラフの共有点の座標を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{1}{x-1}$，$y=x-1$

(2)　$y=\dfrac{2}{x+2}$，$y=x$

(3)　$y=\dfrac{4x}{2x-1}$，　$y=2x$

$\boxed{9}$　グラフを利用して，次の不等式を解け。

(1)　$\dfrac{1}{x-1}>x-1$

(2)　$\dfrac{2}{x+2}\leqq x$

(3)　$\dfrac{4x}{2x-1}\geqq 2x$