高３理系 数ⅡＢ選択者の課題　第３回

休校が始まって早３週間、心と身体のコンディションは大丈夫ですか？

外出自粛で運動不足になってませんか？　ちょっとくらいいいか…と不規則な生活を続けてしまってませんか？（たまには徹夜も良い経験…なんていったからと言って、まさか昼夜逆転なんてことにはなってないですよね・・・(;´Д｀)　ｼﾝﾊﾟｲ)　　ではでは「頭を鍛える」お手伝い、第３弾のお知らせです。(^^♪

テキスト：「数学Ⅰ・A＋Ⅱ／B　標準演習 PLAN100」（昨年度夏・冬休みの課題で使用したテキスト）

やる箇所：数Ⅰの $\boxed{17}$～$\boxed{24}$　　数Ａの $\boxed{37}$～$\boxed{39}$，$\boxed{45}$～$\boxed{49}$

やり方：指定された問題を解き、丸付けをする。間違ったところはやり直しする。

（課題のやり方等不明な点があれば、9 時～3 時までの間に学校(佐野)に連絡をください。）

提出日：休校明け最初の登校日のＨＲ

来週 受験生モード全開の皆と再会できるのを 楽しみにしています。　(⋈◍＞◡＜◍)。✧♡

さあ ラストスパートじゃ～～～～！

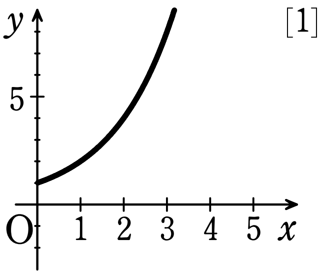
検討を祈る♪　by Sano

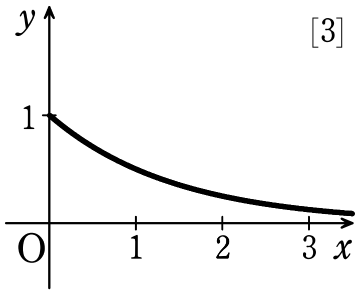
高3　数学Ⅲ　課題２　解答編

教科書P100～をよく読み空欄を埋めよ　　No.1（極限11）

（数学Bより）初項に一定の数 r を次々に掛けて得られる数列を<u>等比数列</u>，r を<u>公比</u>という。
この数列の項が無限に続くものを，<u>無限等比数列</u>という。

初項 r，公比 r の無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限について





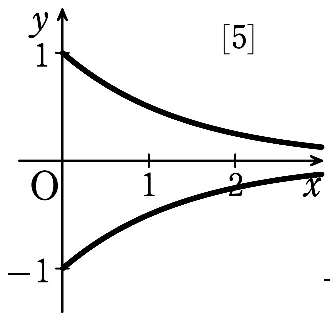
[1]　$r>1$　のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n =$ <u>∞</u>

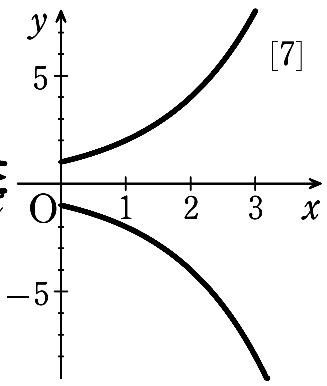
[2]　$r=1$　のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n =$ <u>1</u>

[3]　$0<r<1$　のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n =$ <u>0</u>

[4]　$r=0$　のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n =$ <u>0</u>

[5]　$-1<r<0$　のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n =$ <u>0</u>





[6]　$r=-1$ のとき，$\{r^n\}$ は -1，1，-1，1，…
と -1 と 1 が交互に繰り返す，<u>振動する</u>，
よって極限は<u>ない</u>

[7]　$r<-1$　のとき，$\lim_{n\to\infty} |r|^n = \infty$ で，
n が奇数，偶数で符号が負，正交互に繰り返されるので，<u>振動する</u>。よって極限は<u>なし。</u>

以上より数列 $\{r^n\}$ の極限

Ⅰ　$r>1$　のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$

Ⅱ　$r=1$　のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n = 1$

Ⅲ　$|r|<1$　のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

Ⅳ　$r \leqq -1$　のとき，振動する（極限なし）

よって，「数列 $\{r^n\}$ が収束する　$\Leftrightarrow$ <u>$-1<r\leqq 1$</u>」となる。

P101　例４

(1)　数列 $\{(\sqrt{2})^n\}$ では $\sqrt{2}>1$ であるから　　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2})^n = \infty$

(2)　数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ では $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$ であるから　　$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

(3)　数列 $\{(-2)^n\}$ では $-2<-1$ であるから，極限はない。

P101　練習7　　第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1)　$(\sqrt{3})^n$　　(2)　$\left(\frac{2}{3}\right)^n$　　(3)　$\left(-\frac{4}{3}\right)^n$　　(4)　$2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

解）

(1)　数列 $\{(\sqrt{3})^n\}$ では $\sqrt{3}>1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3})^n=\infty$

(2)　数列 $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ では $\left|\frac{2}{3}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

(3)　数列 $\left\{\left(-\frac{4}{3}\right)^n\right\}$ では $-\frac{4}{3}<-1$ であるから，極限はない。振動する。

(4)　数列 $\left\{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right\}$ では $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}=0$

P101　例5　　数列 $\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^n\right\}$ が収束するための必要十分条件は

$-1<\frac{x}{2}\leqq 1$　　すなわち　$\underline{-2<x\leqq 2}$

極限値は $-2<x<2$ のとき $\underline{0}$，$x=2$ のとき $\underline{1}$ である。

P102　例題2　次の極限を求めよ。

(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^n}{4^n-3^n}$　　(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n+2^n}$

解）　a^n の底が一番大きなもので割る

(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^n}{4^n-3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$　※ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

$=1$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n+2^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$　※ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n=\infty$

$=\infty$

P101　練習8

数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

解）　数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するための必要十分条件は

$\underline{-1<x-1\leqq 1}$ すなわち $\underline{0<x\leqq 2}$

$-1<x-1<1$ すなわち $0<x<2$ のとき　$\lim_{n\to\infty}(x-1)^n=\underline{0}$

$x-1=1$ すなわち $x=2$ のとき　$\lim_{n\to\infty}(x-1)^n=\underline{1}$

P102　練習９　次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^n+2^n}$　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^n}{3^n}$　(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n-2^n}$

解）

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}=1$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=\infty$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=0$$

P102　応用例題2

数列 $\left\{\dfrac{r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を，次の各場合について求めよ。

(1)　$|r|<1$　　(2)　$r<-1$

解）　(1)　$|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n = \underline{0}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}$$

$$=\underline{\frac{0}{1+0}=0}$$

(2)　$r<-1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right| \underline{<1}$ より

$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{r}\right)^n = \underline{0}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}$$

$$=\underline{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}}$$

$$=\frac{1}{0+1}=1$$

P102　　練習10

数列 $\left\{\dfrac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を，次の各場合について求めよ。

(1)　$r>1$　　　(2)　$r=1$　　　(3)　$|r|<1$　　　(4)　$r<-1$

解）(1)　$r>1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{r}\right)^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n-1}{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

(2)　$r=1$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(3)　$|r|<1$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(4)　$r<-1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{r}\right)^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n-1}{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

P103　応用例題3　次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$の極限を求めよ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

解）$\alpha=\dfrac{1}{2}\alpha+1$ より $\alpha=$__より 与えられた漸化式を変形すると________________

$a_n-2=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n$なので，数列$\{b_n\}$は公比___の等比数列である。

よその初項は，$b_1=a_1-2=1-2=-1$ であるから

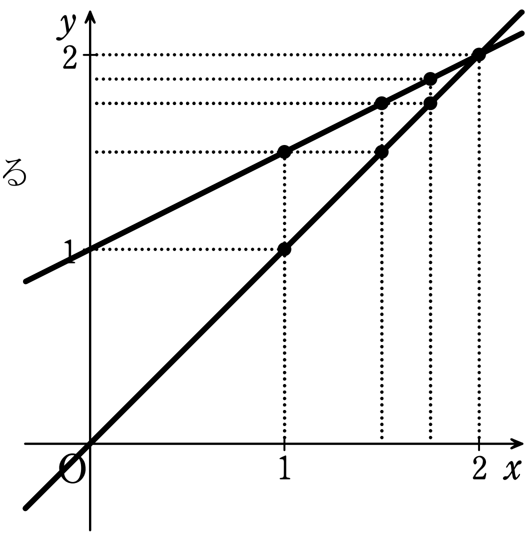
$$b_n=(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad b_n=a_n-2 \quad \text{から } a_n=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

また　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$___であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2\right\}=$__

※別解法

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　なので，$y=x$ と $y=\dfrac{1}{2}x+1$ を考える

また，直線 $y=x$，$y=\dfrac{1}{2}x+1$ をそれぞれ直線 l，mとする。



$a_1=1$ より，直線 l 上に点 $P_1(1,1)$をとる。
直線 m 上の$x=1$における点を Q_1 とすると，
y 座標は, $x=1=a_1$なので $y=\dfrac{1}{2}a_1+1$ つまり a_2 となる
この $x=a_2$ における直線 l 上の点 をP_2とし，
直線 m 上 の 点を Q_2 とすると上記より
$P_2(a_2, a_2)$，$Q_2(a_2, a_3)$　となる。
よって，直線 l 上の点が$P_n(a_n, a_n)$ ならば
直線 m 上 の点は$Q_n(a_n, a_{n+1})$ となる。
このように定まる数列$\{a_n\}$は，直線 l とm の交点の x 座標に限りなく近づくことがわかる，$x=\dfrac{1}{2}x+1$　より $x=2$　つまり，極限は 2 となる。

P103　練習11　　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n+1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

解）

別解　$\begin{cases} y=x \\ y=-\dfrac{1}{3}x+1 \end{cases}$　の x を求める。

$x=-\dfrac{1}{3}x+1$　より，　$x=\dfrac{3}{4}$

問題１　解きなさい解答は後ろ

問１　次の数列の極限値をいえ。

(1)　$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{5}{6}$，……，$\dfrac{2n-1}{2n}$，……

(2)　0.9，0.99，0.999，……，$1-(0.1)^n$，……

(3)　1，$-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{4}{9}$，……，$\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$，……

(4)　$\sin\pi$，$\sin 2\pi$，$\sin 3\pi$，……，$\sin n\pi$，……

解）

問２　第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1)　$3n-2$　(2)　$-4n+9$　(3)　n^3+1　(4)　$2n(1-n)$

(5)　$\dfrac{1}{n^2}$　(6)　$\dfrac{3}{2^n}$　(7)　$2-(-1)^n$　(8)　$\cos n\pi$

解）

問題２

問3　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5n-3}{2n+1}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3}{3n^2-n+1}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-7}{n^2+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{n^3-6n+1}$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$

解)

問題3

問4　次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(n^2-n+1)$　　(2) $\lim_{n\to\infty}(3n^2-2n^3)$　　(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3}{n^2+4}$

解)

問5　次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2-2)}{1-2n^3}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{n^2(1-5n)}$

問題4

問6　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n-1}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}+\sqrt{n+1}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+\sqrt{n^2+3n}}$

問7　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2})$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}$

問題5

問8　次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

問9　次の無限等比数列の極限を調べよ。

(1)　$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots\cdots$

(2)　$1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9},\ \dfrac{1}{27},\ \cdots\cdots$

(3)　$4,\ -3,\ \dfrac{9}{4},\ -\dfrac{27}{16},\ \cdots\cdots$

(4)　$\sqrt{3},\ -3,\ 3\sqrt{3},\ -9,\ \cdots\cdots$

問題6

問10　第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1)　$\left(\dfrac{6}{5}\right)^n$　　(2)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$　　(3)　$\left(-\dfrac{5}{4}\right)^n$　　(4)　$4\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$

問11　数列 $\{(3x)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

問題7

問12　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{4^n}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{4^n+2^n}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{3^n+2^n}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n}{4^n-(-3)^n}$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+(-3)^n}{(-3)^n+2^{n+1}}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(8^n-9^n)$　(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{(-2)^n+2^{2n}\}$

P103　応用例題3　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

解）$\alpha=\frac{1}{2}\alpha+1$ より $\alpha=$_より 与えられた漸化式を変形すると $a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$

$a_n-2=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$ なので，数列 $\{b_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

よその初項は，$b_1=a_1-2=1-2=-1$ であるから

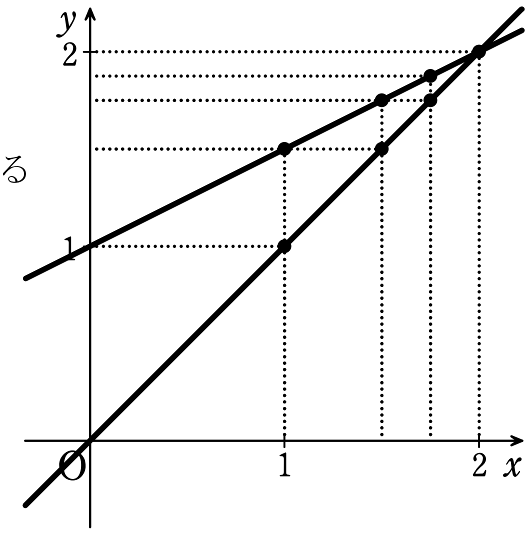
$$b_n=(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad b_n=a_n-2 \quad から\ a_n=(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$$

また　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから　　$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2\right\}=2$

※別解法

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　なので，$y=x$ と $y=\frac{1}{2}x+1$ を考える

また，直線 $y=x$，$y=\frac{1}{2}x+1$ をそれぞれ直線 l，m とする。



$a_1=1$ より，直線 l 上に点 $P_1(1,1)$ をとる。
直線 m 上の $x=1$ における点を Q_1 とすると，
y 座標は，$x=1=a_1$ なので $y=\frac{1}{2}a_1+1$ つまり a_2 となる
この $x=a_2$ における直線 l 上の点を P_2 とし，
直線 m 上の点を Q_2 とすると上記より
$P_2(a_2, a_2)$，$Q_2(a_2, a_3)$　となる。
よって，直線 l 上の点が $P_n(a_n, a_n)$ ならば
直線 m 上の点は $Q_n(a_n, a_{n+1})$ となる。
このように定まる数列 $\{a_n\}$ は，直線 l と m の交点の x 座標に限りなく近づくことがわかる，$x=\frac{1}{2}x+1$　より $x=2$　つまり，極限は 2 となる。

P103　練習11　　次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$の極限を求めよ。

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

解）$\alpha=-\frac{1}{3}\alpha+1$　より，$\alpha=\frac{3}{4}$

与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{3}{4}\right)$

よって，数列$\left\{a_n-\frac{3}{4}\right\}$は公比$-\frac{1}{3}$の等比数列である。

その初項は，$a_1-\frac{3}{4}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ であるから

$$a_n-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから　　$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3}{4}\right)=0$

したがって　　$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{4}$

別解　$\begin{cases} y=x \\ y=-\frac{1}{3}x+1 \end{cases}$　の x を求める。

$x=-\frac{1}{3}x+1$　より，　$x=\frac{3}{4}$

解答

問１　次の数列の極限値をいえ。

(1)　$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{5}{6}$，……，$\dfrac{2n-1}{2n}$，……

(2)　0.9，0.99，0.999，……，$1-(0.1)^n$，……

(3)　1，$-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{4}{9}$，……，$\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$，……

(4)　$\sin\pi$，$\sin 2\pi$，$\sin 3\pi$，……，$\sin n\pi$，……

解）

(1)　$\dfrac{2n-1}{2n}=1-\dfrac{1}{2n}$ で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)=1$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(0.1)^n=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{1-(0.1)^n\}=1$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}=0$

(4)　n が自然数のとき，$\sin n\pi=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0$

問２　第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1)　$3n-2$　　(2)　$-4n+9$　　(3)　n^3+1　　(4)　$2n(1-n)$

(5)　$\dfrac{1}{n^2}$　　(6)　$\dfrac{3}{2^n}$　　(7)　$2-(-1)^n$　　(8)　$\cos n\pi$

解）

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3n-2)=\infty$ であるから，∞ に発散。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-4n+9)=-\infty$　　よって，$-\infty$ に発散。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^3+1)=\infty$ であるから，∞ に発散。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2n=\infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-n)=-\infty$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2n(1-n)=-\infty$

よって，$-\infty$ に発散。

(5)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ であるから，0 に収束。

(6)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2^n}=0$ であるから，0 に収束。

(7)　$a_n=2-(-1)^n$ とおくと，$n\longrightarrow\infty$ のとき　　$a_{2n}\longrightarrow 1$　　$a_{2n-1}\longrightarrow 3$

よって，振動する。

(8)　$\cos n\pi=(-1)^n$　$a_n=(-1)^n$ とおくと，$n\longrightarrow\infty$ のとき　　$a_{2n}\longrightarrow 1$，$a_{2n-1}\longrightarrow -1$

よって，振動する。

解答

問3　次の極限を求めよ。

(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-3}{2n+1}$　(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3}{3n^2-n+1}$　(3)　$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-7}{n^2+1}$

(4)　$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{n^3-6n+1}$　(5)　$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$

解）

(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-3}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}$

$=\frac{5-0}{2+0}=\frac{5}{2}$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3}{3n^2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$

$=\frac{4-0}{3-0+0}=\frac{4}{3}$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-7}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0-0}{1+0}=0$

(4)　$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{n^3-6n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+6}{n^3-6n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}}{1-\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=\frac{0+0+0}{1-0+0}=0$

(5)　$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{-1}{1+0}=-1$

解答

問4　次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(n^2-n+1)$　　(2) $\lim_{n\to\infty}(3n^2-2n^3)$　　(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^3-3}{n^2+4}$

解)

(1) $\lim_{n\to\infty}(n^2-n+1)$

$$=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\infty$$

(2) $\lim_{n\to\infty}(3n^2-2n^3)$

$$=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{3}{n}-2\right)=-\infty$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3}{n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{4}{n^2}}=\infty$$

問5　次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n^2-2)}{1-2n^3}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n-1}{n^2(1-5n)}$

解)

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2-2)}{1-2n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2-2n-2}{1-2n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}{\dfrac{1}{n^3}-2}=\frac{1+0-0-0}{0-2}=-\frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{n^2(1-5n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{n^2-5n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{1}{n}-5}=\frac{0+0-0}{0-5}=0$$

解答

問6　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n-1}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}+\sqrt{n+1}}$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+\sqrt{n^2+3n}}$

解）

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=2-\sqrt{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+\sqrt{n^2+3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$

問7　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2})$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}$

解）

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=0$

(2) $\displaystyle\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}=\frac{(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2})(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2})}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}}$

$\displaystyle=\frac{(n^2+2)-(n^2-2)}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}}=\frac{4}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}}$

よって　(与式)$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1})}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}{(n+2)-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}{3}=\infty$

解答

問8　次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

解)

(1)　$-1\leqq\cos\dfrac{n\pi}{4}\leqq 1$ であるから

$$-\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}\leqq\frac{1}{n}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}=0$$

(2)　$-1\leqq(-1)^n\leqq 1$ であるから

$$-\frac{1}{n+1}\leqq\frac{(-1)^n}{n+1}\leqq\frac{1}{n+1}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=0$$

問9　次の無限等比数列の極限を調べよ。

(1)　2，4，8，16，……　　(2)　1，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{9}$，$\dfrac{1}{27}$，……

(3)　4，-3，$\dfrac{9}{4}$，$-\dfrac{27}{16}$，……　　(4)　$\sqrt{3}$，-3，$3\sqrt{3}$，-9，……

解）等比数列の公比を r とする。

(1)　$r=2$，$r>1$ であるから，∞ に発散する。

(2)　$r=\dfrac{1}{3}$，$|r|<1$ であるから，0 に収束する。

(3)　$r=-\dfrac{3}{4}$，$|r|<1$ であるから，0 に収束する。

(4)　$r=-\sqrt{3}$，$r\leqq-1$ であるから，振動する。すなわち，極限はない。

解答

問10　第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $\left(\frac{6}{5}\right)^n$　　(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^n$　　(3) $\left(-\frac{5}{4}\right)^n$　　(4) $4\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

解)

(1) $\frac{6}{5}>1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{5}\right)^n=\infty$

よって，∞ に発散する。

(2) $\left|\frac{1}{3}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

よって，0 に収束する。

(3) $-\frac{5}{4}\leqq-1$ であるから，振動する。

すなわち，極限はない。

(4) $\left|-\frac{3}{5}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}=0$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}\left\{4\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}=4\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}=0$

よって，0 に収束する。

問11　数列 $\{(3x)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

解)

与えられた数列が収束するための必要十分条件は

$$-1<3x\leqq1\quad すなわち\quad -\frac{1}{3}<x\leqq\frac{1}{3}$$

極限値は　$-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ のとき

$\lim_{n\to\infty}(3x)^n=0$

$x=\frac{1}{3}$ のとき　$\lim_{n\to\infty}(3x)^n=1$

解答

問12　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{4^n}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{4^n+2^n}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{3^n+2^n}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n}{4^n-(-3)^n}$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+(-3)^n}{(-3)^n+2^{n+1}}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(8^n-9^n)$　(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{(-2)^n+2^{2n}\}$

解)

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=\infty$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{4^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\infty$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{0-1}{1+0}=-1$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n}{4^n-(-3)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{0}{1-0}=0$$

5) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+(-3)^n}{(-3)^n+2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{1+2\left(-\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{0+1}{1+0}=1$$

(6) $$\lim_{n\to\infty}(8^n-9^n)=\lim_{n\to\infty}9^n\left\{\left(\frac{8}{9}\right)^n-1\right\}=-\infty$$

(7) $$\lim_{n\to\infty}\{(-2)^n+2^{2n}\}=\lim_{n\to\infty}2^{2n}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1\right\}=\infty$$