高３理系 数ⅡＢ選択者の課題　第２回

課題は順調に進んでいますか？　「なんで去年もっとちゃんと取り組んでおかなかったんだ…」と思ってる人！　受験においての反省はまさにこれにつきます。　来春後悔の無い戦いができるように、悟った「今」から準備を万端に整えていきましょう。

また、今回の休校については、始めは「ラッキー」くらいに思っていたかもしれませんが、休校が長引き、「緊急事態宣言」が発令される等、日本中が未知の敵と戦う毎日で、不安も出て来たのではないかと心配しています。ですが、前回もお伝えしたようにライバルもみんな同じ状況なのです。こんな時こそ冷静に、自己の心身の健康・安全を図りつつ、出来ればライバルに一歩差を付けられるよう踏ん張りどころですよ！

それでは「頭を鍛える」お手伝い第２弾のお知らせです。(^^♪

テキスト：「数学Ⅰ・A＋Ⅱ／B　標準演習 PLAN100」（昨年度夏・冬休みの課題で使用したテキスト）

やる箇所：数Ⅰの $\boxed{9}$～$\boxed{16}$　　数Ａの $\boxed{34}$～$\boxed{36}$, $\boxed{40}$～$\boxed{44}$

やり方：指定された問題を解き、丸付けをする。間違ったところはやり直しする。

（課題のやり方等不明な点があれば、9 時～3 時までの間に学校(佐野)に連絡をください。）

勉強がはかどり始めて、ノッテくると、つい夜ふかしして勉強を続けてしまうこともあるかと思いますが、体調管理は受験テクニックの一つと心得ましょう。「規則正しい生活の維持」は、このような状況だからこそ最重要案件だと考えてください。（ま☆時には徹夜勉強も学生の醍醐味ですけどね…(*^▽^*))

検討を祈る♪　by Sano

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$につてい，$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$　のとき,，以下の３つは明らか（この条件のとき使用可能）

１．$\lim_{n\to\infty}\{a_n+b_n\}=\infty$　　２．$\lim_{n\to\infty} a_n b_n=\infty$　　３．$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0$

しかし，$\lim_{n\to\infty}\{a_n-b_n\}$　や　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b}$　については，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$がどんな数列なのかによっていろいろとことなる。

例３　$\lim_{n\to\infty} n=\infty$　，なので，$\lim_{n\to\infty} 2n$，$\lim_{n\to\infty} 3n$，$\lim_{n\to\infty} 4n$，$\lim_{n\to\infty} n^2$，$\lim_{n\to\infty} n^3$　などは全て∞に発散する

(1)　$\lim_{n\to\infty}(n^2-3n)$　※←最高次数で括る

$=\underline{\lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\dfrac{3}{n}\right)}$　　※$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}=0$なので，$\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n}\right)=1$ より

$=\infty$

(2)　$\lim_{n\to\infty}(n^2-4n^3)$　※←最高次数で括る

$=\underline{\lim_{n\to\infty} n^3\left(\dfrac{1}{n}-4\right)}$　　※$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$なので，$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-4\right)=-4$　より

$=-\infty$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}$　※←分母の最高次数で分母，分子を括る

$=\underline{\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n}\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{n}}}=\underline{\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{n}}}$　　※$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$なので，$\lim_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)=2$ より

$=\dfrac{1}{2}$

(4)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n}{n^2-2}$　※←分母の最高次数で分母，分子を括る

$=\underline{\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2}\dfrac{\dfrac{3}{n}}{1-\dfrac{2}{n^2}}}$

$=\underline{\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{3}{n}}{1-\dfrac{2}{n^2}}}$　　※$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}=0$，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}=0$なので，$\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n^2}\right)=1$ より

$=\dfrac{0}{1}$

$=0$

３組　　番　名前

P98　練習4　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n^3-n^2)$

解

$$\lim_{n\to\infty}(2n^3-n^2)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(2-\frac{1}{n}\right)=\infty$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n-3n^2)$

解

$$\lim_{n\to\infty}(n-3n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n}-3\right)=-\infty$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n-n^3)$

解

$$\lim_{n\to\infty}(2n-n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{2}{n^2}-1\right)=-\infty$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}$

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}$$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n^2+3}$

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=0$$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{2n+1}$

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{2+\frac{1}{n}}=\infty$$

3組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　　　）

P98　例題1　次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$$

解）

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$　※　分母の有利化の逆をする。和と差の積を利用

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}$$ ※←分母の最高次数で分母，分子を括る

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$ ※ $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$　より

$$=\frac{1}{2}$$

P98　　練習5　次の極限を求めよ。

(1)　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

解）(1)　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$=0$$

(2)　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$

解）(2)　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)}{\sqrt{n^2-n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-n)-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n\sqrt{1-\frac{1}{n}}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

数列の極限の性質(２)　（１）の続き

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$,　$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$　とする。

５　すべての n について　$a_n \leqq b_n$ ならば　$\alpha \leqq \beta$

６　すべての n について　$a_n \leqq c_n \leqq b_n$　かつ　$\alpha = \beta$　ならば　$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

（はさみうちの原理）

P99　応用例題1

極限 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}$ を求めよ。

解）

$-1 \leqq \sin\frac{n\pi}{3} \leqq 1$ より　$\frac{1}{n} > 0$　なので

$-\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3} \leqq \frac{1}{n}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ であるから※性質(2)の６「はさみうちの原理」より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3} = 0$$

P99　練習6　θ を定数とするとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}$$

解）

$-1 \leqq \cos\frac{n\theta}{6} \leqq 1$ より　$-\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6} \leqq \frac{1}{n}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6} = 0$$

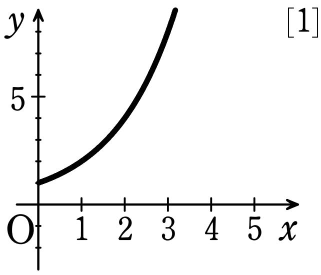
（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

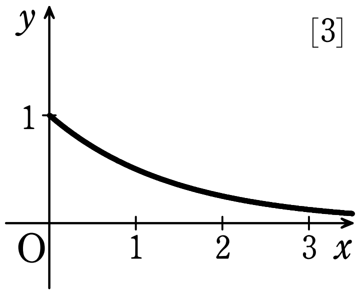
高3　数学Ⅲ　課題２

教科書P100～をよく読み空欄を埋めよ　　No.1（極限11）

（数学Bより）初項に一定の数 r を次々に掛けて得られる数列を______，r を____という。
この数列の項が無限に続くものを，__________という。

初項 r，公比 r の無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限について





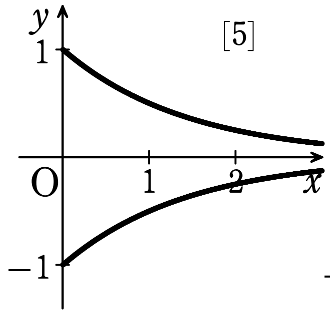
[1]　$r>1$　のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=$____

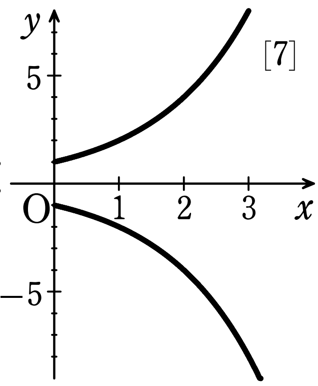
[2]　$r=1$　のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=$___

[3]　$0<r<1$　のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=$___

[4]　$r=0$　のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=$___

[5]　$-1<r<0$　のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=$_____





[6]　$r=-1$ のとき，$\{r^n\}$ は $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$
と -1 と 1 が交互に繰り返す，______する，
よって極限は________

[7]　$r<-1$　のとき，$\lim_{n\to\infty} |r|^n=\infty$ で，
n が奇数，偶数で符号が負，正交互に繰り返されるので，______する。よって極限は__________

以上より数列 $\{r^n\}$ の極限

Ⅰ　$r>1$　のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$

Ⅱ　$r=1$　のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=1$

Ⅲ　$|r|<1$　のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=0$

Ⅳ　$r\leqq -1$　のとき，振動する（極限なし）

よって，「数列 $\{r^n\}$ が収束する　$\Leftrightarrow$ ______________」となる。

P101　例４

(1)　数列 $\{(\sqrt{2})^n\}$ では $\sqrt{2}>1$ であるから　　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2})^n=\infty$

(2)　数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ では $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$ であるから　　$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$

(3)　数列 $\{(-2)^n\}$ では $-2<-1$ であるから，極限はない。

P101　練習7　　第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1)　$(\sqrt{3})^n$　　(2)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$　　(3)　$\left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$　　(4)　$2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

解）

(1)

(2)

(3)

(4)

P101　例5　　数列 $\left\{\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\right\}$ が収束するための必要十分条件は

$-1<\dfrac{x}{2}\leqq 1$　　すなわち　__________

極限値は $-2<x<2$ のとき___，$x=2$ のとき____である。

P102　例題2　次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^n}{4^n-3^n}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n+2^n}$

解）a^n の底が一番大きなもので割る

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^n}{4^n-3^n}$

$=$　　※ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

$=1$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n+2^n}$

$=$　　※ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n=\infty$

$=\infty$

P101　練習8

数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

解）　数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するための必要十分条件は

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿すなわち＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$-1<x-1<1$ すなわち $0<x<2$ のとき　$\lim_{n\to\infty}(x-1)^n=$＿＿＿

$x-1=1$ すなわち $x=2$ のとき　$\lim_{n\to\infty}(x-1)^n=$＿＿

P102　練習９　次の極限を求めよ。

(1)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{5^n-2^n}{5^n+2^n}$　　(2)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{4^n-2^n}{3^n}$　　(3)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}}{3^n-2^n}$

解）

P102　　応用例題2

数列 $\left\{\dfrac{r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を，次の各場合について求めよ。

(1)　$|r|<1$　　(2)　$r<-1$

解）　(1)　$|r|<1$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=$ ＿ であるから

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{1+r^n}$

$=$ ＿＿＿＿＿＿

(2)　$r<-1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right|$ ＿＿＿ より

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{r}\right)^n=$ ＿ であるから

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{1+r^n}$

$=$

＿＿＿＿＿＿

$=\dfrac{1}{0+1}=1$

P102　練習10

数列 $\left\{\dfrac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を，次の各場合について求めよ。

(1)　$r>1$　　(2)　$r=1$　　(3)　$|r|<1$　　(4)　$r<-1$

解）