高３理系 数ⅡＢ選択者の課題　第１回

皆さん体調は大丈夫ですか？　身体の調子はもとよりストレス溜めこんでませんか？　「さあ 高３のスタート！　受験に向けて頑張るぞ‼ 」と思っていたのに出鼻を挫かれた…なんて嘆いてませんか？　でも、考えてみてください。ライバルもみんな同じ状況です。こんな時こそ皆さんの持ち前の明るさやエネルギーで自分自身を奮い立たせてくださいね。　まずは規則正しい生活のために「しっかり食べる・きちんと寝る」、その上で「頭と体を出来る限り鍛える」ことですね。その「頭を鍛える」お手伝いのお知らせです。(^^♪

テキスト:「数学Ⅰ・A＋Ⅱ／B　標準演習 PLAN100」（昨年度夏・冬休みの課題で使用したテキスト）

やる箇所:数Ⅰの$\boxed{1}$～$\boxed{8}$, $\boxed{25}$～$\boxed{29}$　　　数Ａの$\boxed{30}$～$\boxed{33}$

やり方:指定された問題を解き、丸付けをする。間違ったところはやり直しする。

以上、課題のやり方等不明な点があれば、9 時～3 時までの間に学校(佐野)に連絡をください。

毎日色んな教科から愛情あふれる(課題という名の)プレゼントが届いていると思いますが、全てを１日でやろうなどと思わないことです。必要な生活時間以外の時間を全て受験勉強に費やせるように、日々コツコツ努力して、しっかり頭を受験生モードに切り替える準備期間にしてください。（今回の課題が昨年度の夏・冬休み中に既に終わらせてある人は、まだ手つかずのⅡやＢの範囲にも取り組んでみてはいかが？）

検討を祈る♪　by Sano

教科書P94～　をよみ　空欄______に必要なことを書きなさい。4月13日朝のHRに提出すること。

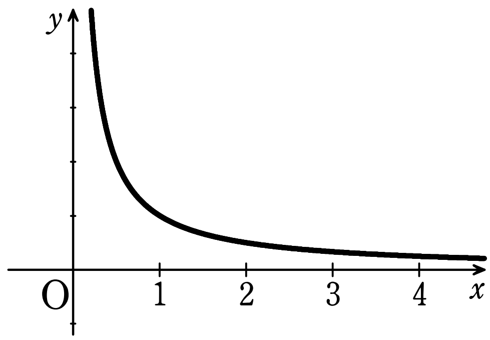
数列と極限

（数学Bより）数を一列にならべたものを数列といい，数列における各数を項といい，一番先頭の項を初項，n 番目の項を第 n 項という。この第 n 項を n の式で表したものを一般項という。また数列を $\{a_n\}$ で示すことがあり，a_1 が初項，a_n が 第 n 項となる。
項の数に限りがある数列を有限数列，限りのないものを無限数列という。
数学Ⅲでは無限数列について考えていく（ことわりがない場合は無限数列と考える）

例　$a_n=\dfrac{1}{n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ を考える。

$1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{1}{n},\ \cdots\cdots$

この数列は n を限りなく大きくすると，
第 n 項，a_n は 0 に限りなく近づくことが分かる。



一般に，数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくすると，a_n がある値 α に限りなく近づくなら，「$\{a_n\}$ は α に 収束 する」⇔「$\{a_n\}$の極限は α である」という。
このとき，値 α を $\{a_n\}$ の 極限値 ともいう。
このことを，以下のように表す　注　∞：「無限大」とよみ，値（数値）ではない

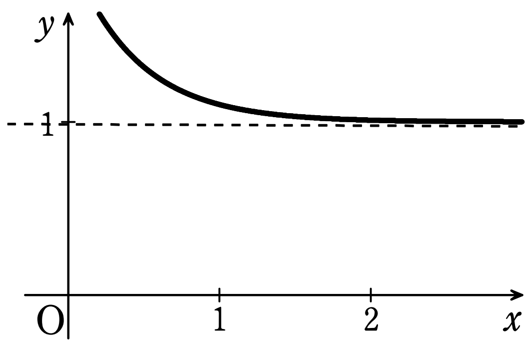
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \iff n\to\infty \text{ のとき，} a_n \to \alpha$$

上記の例の場合　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \iff n\to\infty$ のとき，$\dfrac{1}{n}\to 0$ となる（一方でOK）

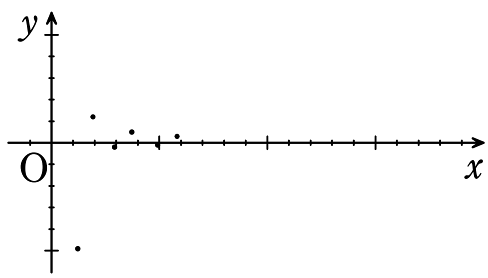
c を定数とすると，$c,\ c,\ c,\ c,\ c,\ c,\ c,\ \cdots\cdots$　c が無限に続く数列も c に 収束 するといい，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c = c$ である

P95　　例 1

(1)　数列　$1.1,\ 1.01,\ 1.001,\ \cdots\cdots,\ 1+(0.1)^n,\ \cdots\cdots$
は，1 に収束する。
すなわち，この数列の極限値は 1 である。
つまり　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{1+(0.1)^n\} = 1$



(2)　数列　$-0.1,\ 0.01,\ -0.001,\ \cdots\cdots,\ (-0.1)^n,\ \cdots\cdots$
は，各項の符号が負，正，負，……
と交互に変わりながら 0 に収束する。
すなわち，この数列の極限値は 0 である。
つまり　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-0.1)^n = 0$



３組　　番　名前

P95　　練習1　　次の数列の極限値をいえ。

(1)　$\dfrac{2}{1},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{4}{3},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{n+1}{n},\ \cdots\cdots$

解　1

(2)　$-1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{(-1)^n}{n},\ \cdots\cdots$

解　　0

(3)　$\cos\pi,\ \cos 3\pi,\ \cos 5\pi,\ \cdots\cdots,\ \cos(2n-1)\pi,\ \cdots\cdots$

解　　-1

3組(　　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　　)

数列$\{a_n\}$が＿収束しないとき＿，$\{a_n\}$は発散するという。ただし，発散には3通りある。

ｉ）＿正の無限大＿に発散⇔極限は正の無限大⇔ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

ⅱ）＿負の無限大＿に発散⇔極限は負の無限大⇔ $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

ⅲ）＿振 動＿（する）＿ ⟹極限はない

（注意）いずれも場合も＿極限値＿はない（⇔収束しない）

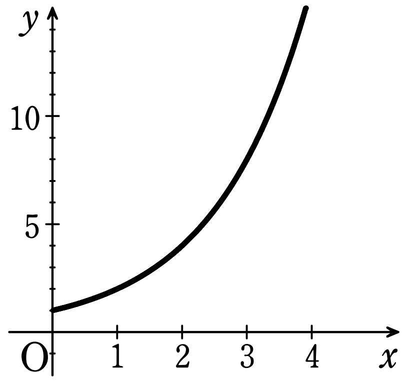
例

ｉ）数列　2，4，8，…，2^n，…

この数列は n を限りなく大きくすると

2^n も限りなく大きくなる。

$\lim_{n\to\infty} 2^2 =$＿∞＿　つまり，この数列の極限は＿∞＿となる。



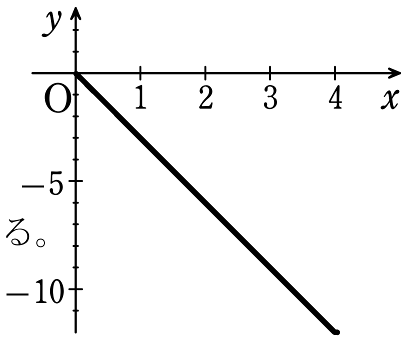
ⅱ）数列　-3，-6，-9，…，$-3n$，…

この数列は n を限りなく大きくすると

$-3n$ は，負の値で，絶対値が限りなく大きくなる

（限りなく小さくなるとは言わない）

$\lim_{n\to\infty}(-3n) =$＿$-\infty$＿　つまりこの数列の＿極限＿は$-\infty$となる。



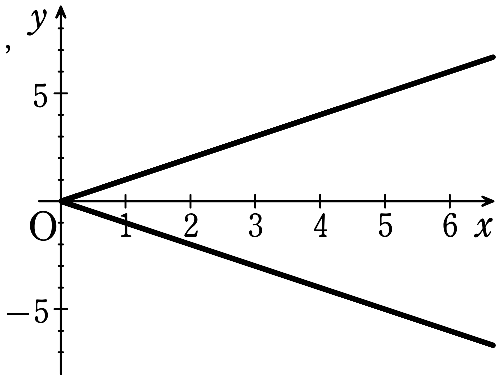
ⅲ）数列　1，-2，3，-4，…，$(-1)^{n-1}n$，…

この数列は n を限りなく大きくしても，収束しないし，

無限大にも，負の無限大にも発散しない

この状態を発散という。

$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}n$　はない



数列の収束・発散

収束	値 α に収束	$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$	……	極限は　α
発散（収束しない）	正の無限大に発散	$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$	……	極限は　∞
	負の無限大に発散	$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$	……	極限は　$-\infty$
	振動		……	極限は　ない

３組　　番　名前

P96　　練習2　第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1)　$2n$　　(2)　$-\frac{1}{n}$　　(3)　$-n^2$　　(4)　$1+(-1)^n$

解

(1)　極限は∞　　(2)　極限は０　　(3)　極限は－∞　(4)極限はない（振動）

数列の極限の性質(１)

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束するとき，次のことが成り立つ。

数列の極限の性質(1)

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ とする。

1　$\lim_{n\to\infty} ka_n=k\alpha$　　ただし，k は定数

2　$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$,　$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

3　$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$

4　$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$　　ただし，$\beta\neq 0$

P97　例２　$\lim_{n\to\infty} a_n=2$, $\lim_{n\to\infty} b_n=-3$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}(3a_n+b_n)$$
$$=3\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n$$
$$=3\cdot 2+(-3)=3$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)$$
$$=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} 2$$
$$=2-2=0$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+4}{a_n-3}$$
$$=\frac{\lim_{n\to\infty}(b_n+4)}{\lim_{n\to\infty}(a_n-3)}$$
$$=\frac{-3+4}{2-3}=-1$$

P97　練習3　$\lim_{n\to\infty} a_n=1$，$\lim_{n\to\infty} b_n=-2$ のとき，次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$

解

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n$

$=1-(-2)=3$

(2) $\lim_{n\to\infty}(3a_n+2b_n)$

解

(2) $\lim_{n\to\infty}(3a_n+2b_n)=3\lim_{n\to\infty} a_n+2\lim_{n\to\infty} b_n$

$=3\cdot 1+2\cdot(-2)=-1$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)$

解

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} 1$

$=1-1=0$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$

解

(4) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\lim_{n\to\infty} b_n$

$=1\cdot(-2)=-2$

(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n+5}{2a_n-1}$

解

(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n+5}{2a_n-1}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}(b_n+5)}{\lim_{n\to\infty}(2a_n-1)}$

$=\dfrac{-2+5}{2\cdot 1-1}=3$

(6) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{a_n+b_n}$

解

(6) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{a_n+b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)}{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)}$

$=\dfrac{1-(-2)}{1+(-2)}=-3$

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　）

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$につてい，$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$　のとき,, 以下の３つは明らか（この条件のとき使用可能）

1．$\lim_{n\to\infty}\{a_n+b_n\}=\infty$　　2．$\lim_{n\to\infty} a_n b_n=\infty$　　3．$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0$

しかし，$\lim_{n\to\infty}\{a_n-b_n\}$　や　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b}$　については，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$がどんな数列なのかによっていろいろとことなる。

例３　$\lim_{n\to\infty} n=\infty$　，なので，$\lim_{n\to\infty} 2n$，$\lim_{n\to\infty} 3n$，$\lim_{n\to\infty} 4n$，$\lim_{n\to\infty} n^2$，$\lim_{n\to\infty} n^3$　などは全て∞に発散する

(1)　$\lim_{n\to\infty}(n^2-3n)$　※←最高次数で括る

＝＿＿＿＿＿＿　※$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}=0$なので，$\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n}\right)=1$ より

＝∞

(2)　$\lim_{n\to\infty}(n^2-4n^3)$　※←最高次数で括る

＝＿＿＿＿＿＿　※$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$なので，$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-4\right)=-4$　より

＝－∞

(3)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}$　※←分母の最高次数で分母，分子を括る

＝＿＿＿＿＿＿　＝＿＿＿＿＿＿　※$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$なので，$\lim_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)=2$ より

$=\dfrac{1}{2}$

(4)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n}{n^2-2}$　※←分母の最高次数で分母，分子を括る

＝＿＿＿＿＿＿

＝＿＿＿＿＿＿　※$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}=0$，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}=0$なので，$\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n^2}\right)=1$ より

$=\dfrac{0}{1}$

＝0

P98　　練習4　次の極限を求めよ。

(1)　$\lim_{n\to\infty}(2n^3-n^2)$

解

(2)　$\lim_{n\to\infty}(n-3n^2)$

解

(3)　$\lim_{n\to\infty}(2n-n^3)$

解

(4)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n-2}$

解

(5)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n-1}{n^2+3}$

解

(6)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2n}{2n+1}$

解

(　　　)組(　　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

P98　　例題1　　次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$$

解）

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$　※　分母の有理化の逆をする。和と差の積を利用

$=$ ________________

$=$ ________________

$=$ ________________　※←分母の最高次数で分母，分子を括る

$=$ ________________　※ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$　より

$=\dfrac{1}{2}$

P98　　練習5　次の極限を求めよ。

(1)　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

解）

(2)　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$

解）

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　）

数列の極限の性質(２)　（１）の続き

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$　とする。

５　すべての n について　$a_n \leqq b_n$ ならば　$\alpha \leqq \beta$

６　すべての n について　$a_n \leqq c_n \leqq b_n$　かつ　$\alpha = \beta$　ならば　$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

（　　　　　　の原理）

P99　　応用例題1

極限 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3}$ を求めよ。

解）

$-1 \leqq \sin \frac{n\pi}{3} \leqq 1$ より　$\frac{1}{n} > 0$　なので

ここで，$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから※性質(2)の６「はさみうちの原理」より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3} = 0$$

P99　練習6　θ を定数とするとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\theta}{6}$$

解）

（　　　）組（　　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　　　　）